114 - Drehpendel

1. Aufgaben

1.1 Ermitteln Sie Trägheitsmoment und Direktionsmoment eines Drehpendels durch das Ausmessen von Torsionsschwingungen!

1.2 Bestimmen Sie das Direktionsmoment auch mit Hilfe einer statischen Methode!

1.3 Ermitteln Sie die Trägheitsmomente zweier Probekörper (Scheibe, Stab)!

1.4 Zusatzaufgabe (für Physik-Studenten): Überprüfen Sie die Gültigkeit des Steinerschen Satzes!

2. Grundlagen

Stichworte:
Dreh- oder Torsionspendel, Drehmoment, Trägheitsmoment, Direktionsmoment, Schwingungsgleichung, harmonische Schwingung, Steinerscher Satz

2.1 Das Drehpendel als schwingungsfähiges System

Ein Drehpendel besteht aus einer horizontalen, drehbar gelagerten Scheibe, deren Drehachse über eine Spiralfeder mit dem Gehäuse verbunden ist. Soll das Pendel um einen bestimmten Winkel φ gegen seine Ruhelage verdreht werden, muss man ein Drehmoment M (z.B. durch eine tangential im Abstand r von der Drehachse angreifenden Kraft F) anlegen: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Die Größe von M wird durch das rücktreibende Moment der Feder (Direktionsmoment D) bestimmt. Es gilt:

$$\vec{M} = -D \cdot \vec{\varphi} \qquad (1).$$

Wird das Pendel nach erfolgter Auslenkung losgelassen, so vollführt es Drehschwingungen, welche bei Vernachlässigung der Reibung durch die Differentialgleichung

$$I \cdot \ddot{\vec{\varphi}} = -D \cdot \vec{\varphi} \qquad (2)$$

beschrieben werden. I ist das Massenträgheitsmoment des Drehtisches, welches durch Aufsetzen von Zusatzkörpern verändert werden kann. Die Lösungen der Differentialgleichung sind harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (3)$$

2.2 Massenträgheitsmomente

Analog zur geradlinigen Bewegung, wo die Wirkung der Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper der Masse m zur Beschleunigung a führt ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$), ergibt sich bei der Drehbewegung die Winkelbeschleunigung α (oder $\ddot{\varphi}$) aus der Wirkung des Drehmomentes $\vec{M}$ auf einen Körper mit dem Trägheitsmoment I (entsprechend $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$). Für den Massenpunkt gilt $I = m \cdot r^2$, wobei r der Abstand von der Drehachse ist. Eine kleine Masse weit außen angebracht kann somit das gleiche I besitzen wie eine große Masse in Achsennähe. Für beliebige Körper berechnet sich das Massenträgheitsmoment aus:

$$I = \int_{\text{Volumen}} r^2 \,\mathrm{d}m \tag{4}$$

Daraus ergibt sich in unserem speziellen Fall:

für einen langen, homogenen Stab (Masse m, Länge ℓ), Achse durch den Massenmittelpunkt:

$$I_{\text{Stab}} = \frac{m}{12} \ell^2 \tag{5}$$

und für eine homogene Scheibe (Masse m, Radius r), Achse ist Symmetrieachse:

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{m}{2} r^2 \tag{6}$$

2.3 Messmethode

2.3.1 Für die Schwingungsdauer T_{o} des Drehtisches (mit Trägheitsmoment I_{o}) ohne Zusatzmasse gilt:

$$T_{\text{o}}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_{\text{o}}}{D} \tag{7}$$

Zur Ermittlung von I_{o} und D (**dynamische Methode**) wird eine Zusatzmasse m im Abstand s von der Drehachse angebracht, wodurch sich die Schwingungsdauer auf

$$T_{\text{m}}^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_{\text{o}} + ms^2}{D} \tag{8}$$

erhöht. Durch Kombination der Gleichungen 7 und 8 erhält man

$$I_{\text{o}} = \frac{ms^2}{\left(\frac{T_{\text{m}}}{T_{\text{o}}}\right)^2 - 1} \tag{9}$$

bzw.

$$D = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{o}}}\right)^2 \cdot I_{\text{o}} \tag{10}$$

Hinweis: Im Versuch realisieren wir den Massenpunkt m näherungsweise durch einen rotationssymmetrischen Körper, welcher „lose“, d.h. frei drehbar aufgesetzt wird.

2.3.2 Die **statische Methode** zur Bestimmung des Direktionsmomentes nutzt unmittelbar die Gültigkeit von Gl. 1 aus. Die Gewichtskraft von Massestücken ($\vec{F}$ = m · $\vec{g}$), greift über einen Faden mit Umlenkrolle tangential am Rande des kreisförmigen Drehtisches an und steht damit senkrecht zum Radius *r*. Das Drehmoment hat somit den Betrag $M = m \cdot g \cdot r$. Nach Messung des Auslenkwinkels φ gegenüber der Ruhelage kann das Direktionsmoment aus:

$$D = \frac{m \cdot g \cdot r}{|\varphi|} \tag{11}$$

berechnet werden.

2.3.3 Sind I_o und *D* bekannt, so kann das Massenträgheitsmoment I_K eines beliebigen Körpers ermittelt werden, indem er bei $s = 0$ fest aufgesetzt und die Schwingungsdauer des Systems „Drehtisch + Zusatzkörper“ gemessen wird.

Es gilt

$$T_K^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_o + I_K}{D} \tag{12}$$

woraus folgt

$$I_K = \left(\frac{T_K}{2\pi}\right)^2 \cdot D - I_o \tag{13}.$$

2.4. Steinerscher Satz

Um die Gültigkeit des Steinerschen Satzes $I_s = I_{s=0} + ms^2$ zu prüfen, wird die Zusatzmasse (Scheibe bzw. Stab) in verschiedenen Abständen *s* von der Drehachse angebracht und jeweils T_m bestimmt wird. Die Messpunkte ergeben eine Gerade der Form $T_m^2 = B \cdot s^2 + A$, wobei der Parameter A die Trägheitsmomente aller beteiligten Körper bezüglich der Dreh-achse durch den Schwerpunkt enthält und B die Gesamtmasse der bei s aufgesetzten Körper.

3. Versuchsdurchführung

3.1 Die Schwingungsdauer des Drehpendels ist mit der Stoppuhr jeweils für folgende Anordnungen zu messen:

- Drehtisch alleine
- Drehtisch mit lose aufgesetztem Körper (Scheibe, Stab) im Abstand *s* von der Drehachse
- Drehtisch mit bei $s = 0$ fest aufgesetztem Körper (Scheibe, Stab).

Als Zusatzkörper finden ein Stab und eine Scheibe Verwendung. Es ist sinnvoll, den Abstand *s* so groß wie möglich zu wählen. Denkbar ist auch die Aufnahme einer Messreihe mit verschiedenen Abständen. Grundsätzlich sollte man immer über eine möglichst große Zahl von Schwingungen mitteln, um den Messfehler zu verringern.

Die Werte für die Massen der Körper liegen am Versuchsplatz aus.

Die Brechnungen von (T_o, D, I_K) erfolgen mit Gl. 9, 10 und 13.

3.2 Zur statischen Bestimmung des Direktionsmomentes werden ca. zehn Messungen bei verschiedenen Drehmomenten durchgeführt (Auslenkung φ bis etwa 90°). Das Anlegen der Drehmomente erfolgt durch Anhängen von Gewichtsstücken. Man trägt die Messwerte in ein $\varphi(m)$-Diagramm ein und bestimmt den Anstieg $\Delta\varphi/\Delta m$ der entstehenden Geraden. Aus Gl. 11 folgt dann:

$$D = g \cdot r \cdot \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta m}\right)^{-1} \quad .$$

Vergleichen Sie den so gewonnenen Wert mit dem Ergebnis der dynamischen Methode!

3.3 Für den Nachweis des Satzes von Steiner wird ebenfalls T_m^2 über s^2 grafisch aufgetragen. Die Messpunkte ergeben eine Gerade, deren Parameter A = $4\pi^2 I/D$ und B = $4\pi^2 m/D$ durch lineare Regression bestimmt werden können. Die bei s aufgesetzte Gesamtmasse ergibt sich jeweils aus $m = m_\mathrm{Achse} + m_\mathrm{Körper}$. Aus den Regressionsparametern A und B lassen sich dann D und I bzgl. des Schwerpunktes berechnen. Bei Gültigkeit des Steinerschen Satzes stimmen dieses Werte mit denen aus der dynamischen Methode überein.