Behandlung von Messabweichungen

Hier wird eine kurze Darstellung zum Verständnis der Problematik von Messgenauigkeit und Messunsicherheit aus der Sicht des Physikalischen Praktikums gegeben, siehe auch die Ausführungen zur „Fehlerrechnung“ auf der Homepage des Praktikums.

Eine physikalische Messung ist niemals beliebig genau. Sie besitzt eine **Messabweichung** (im allgemeinen Sprachgebrauch „*Messfehler*“ genannt). Die Gründe dafür liegen beim Experimentator, den verwendeten Messgeräten bzw. Einflüssen aus der Umgebung.
Wir müssen dabei zwischen den eigentlichen **(zufälligen)** Messabweichungen und **systematischen** Messabweichungen unterscheiden.

Zufällige Messabweichungen

Die Ursachen der zufälligen Messabweichungen liegen in der **subjektiven Unvollkommenheit** des Experimentators (Unsicherheit beim Ablesen einer Skala, beim Handhaben eines Messgerätes wie Lineal, Messschieber, Stoppuhr usw.) und in der begrenzten **Genauigkeit der Messgeräte** (Toleranz des Herstellers, Schwankungen der Anzeige), wobei Schwankungen des Messwertes oft auch durch **wechselnde Umgebungsbedingungen** hervorgerufen werden. Hinzu kommen Messgrößen, die von ihrer Natur her statistischen Charakter besitzen. Diese werden gesondert behandelt.
Vereinfacht gesagt gehört all das, was bereits auf den ersten Blick als Messunsicherheit erscheint (sowie alle Angaben mit „Δ“oder „±“) zu den zufälligen „Fehlern“. *Zufällig* heißt dabei: der konkrete Messwert x kann sowohl nach oben (+) als auch nach unten (-) vom tatsächlichen Wert abweichen, und der Betrag der Abweichung kann zwischen Null (zufällige exakte Übereinstimmung) und einem Maximalwert Δx („Größtfehler“) liegen.

Systematische Messabweichungen

Während zufällige Messabweichungen relativ leicht zu erkennen, dafür aber niemals völlig zu vermeiden sind, ist es bei den systematischen Messabweichungen umgekehrt. Der Begriff „systematisch“ sagt dabei, dass die gemessenen Werte bezogen auf den wahren Wert **alle in dieselbe Richtung** abweichen. Das kann folgende Ursachen haben: Der Experimentator arbeitet systematisch falsch (schräger Blick auf die Skala, Reaktionszeit beim Starten und Anhalten der Stoppuhr usw.), oder das Messgerät ist fehlerhaft geeicht (zeigt z.B. immer 1 % zuviel an) oder die Messmethode ist nicht vollkommen, d.h. bestimmte Einflussgrößen werden vernachlässigt (Wärmeabgabe an die Umgebung, Innenwiderstand, Auftrieb u.ä.).
Diese Fehlerquellen lassen sich prinzipiell **beseitigen bzw. korrigieren** (Experimentator übt das Ablesen, bis nur noch die zufällige Messunsicherheit übrig bleibt; es wird die persönliche Reaktionszeit bestimmt und von jedem Messwert

abgezogen; das Messgerät wird neu geeicht und daraufhin die fehlerhaften Messwerte korrigiert usw.). **Das Hauptproblem besteht darin, das Vorhandensein systematischen Messabweichungen überhaupt zu erkennen**.

Umgang mit zufälligen Messabweichungen

Die Messabweichung Δx der Messgröße x muss vom Experimentierenden unter Beachtung der Genauigkeit des Messgerätes und der eigenen Fähigkeiten sowie mit einer nicht zu kleinen Portion gesunden Menschenverstandes **abgeschätzt** werden.
Dort, wo es möglich ist, sollte eine Messung mehrmals wiederholt werden, um dadurch ein Gefühl für die Messgenauigkeit zu entwickeln. Bei vielen Wiederholungen unter identischen Bedingungen können zur Auswertung (Mittelwert $\overline{x}$, $\Delta\overline{x}$) statistische Methoden herangezogen werden (vgl. unten).
Beachten Sie dabei, dass auf diese Weise nur Fehleranteile erfasst werden, die von Schwankungen bzw. Ableseungenauigkeiten o.ä. herrühren. Messgerätetoleranzen werden z.B. so nicht erkannt. Diese müssen den jeweiligen Gerätebeschreibungen entnommen und hinzuaddiert werden.

Beispiel: Mit einem Maßstab (Toleranzangabe des Herstellers: ± 0.5 mm) wird eine Länge bestimmt. Es werden 10 Messungen durchgeführt und statistisch ausgewertet:

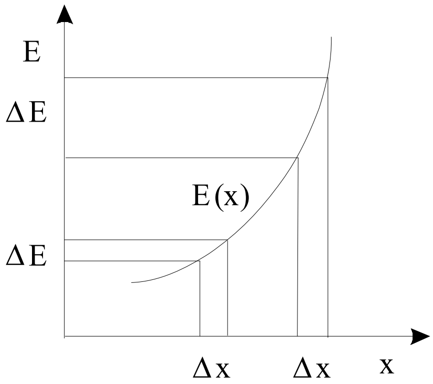
Mittelwert: 274.3 mm

Vertrauensbereich des Mittelwertes: ± 0.4 mm

Die tatsächliche Messgenauigkeit ergibt sich durch Addition des statistischen Anteils mit dem Gerätefehler, d. h. Länge l = (274.3 ± 0.9) mm.

Werden im Versuch **mehrere Größen** (x, y, z, …) gemessen, ist für jede einzelne die Messunsicherheit so wie oben beschrieben abzuschätzen.
Dies geschieht am besten bereits *während der laufenden Messung* und nicht erst nachträglich beim Auswerten (ggf. Assistent fragen)! Praktikanten sollten sich bewusst sein, dass gerade dieser Teil der „Fehlerbehandlung“ die eigentliche Kunst darstellt, während die nachfolgende so genannte „Fehlerrechnung“ nur ein reiner Formalismus ist.

Eine „Fehlerrechnung“ ist dann erforderlich, wenn aus mehreren messabweichungsbehafteten Größen (x, y, z, ...) eine Ergebnisgröße E = E (x, y, z, ...) berechnet wird, deren Messunsicherheit ΔE angegeben werden soll. Mathematisch ergibt sich ΔE mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Gleichung E = E (x, y, z, ...) nach allen messabweichungsbehafteten Größen (x, y, z, ...), die jeweils mit Δx, Δy, Δz,.. multipliziert werden.



Um dies plausibel zu machen, betrachten Sie bitte die Abbildung (zur Vereinfachung wird nur eine Messgröße X angenommen). Es ist leicht zu erkennen, daß die Unsicherheit des Ergebnisses ΔE bei gleichem Δx vom Anstieg der Kurve $\left(1.\ \text{Ableitung}\ \frac{\partial E}{\partial x}\right)$ abhängt.

Es gilt für kleine Δx: $\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| \Delta x$

Bei mehreren Messgrößen $E = E(x, y, z, ...)$ erhält man analog dazu die maximale Messunsicherheit, den so genannten Größtfehler:

$$\Delta E \;=\; \left|\frac{\partial E}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial E}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial E}{\partial z}\right| \Delta z + \ldots$$

Es gibt eine Reihe von Spezialfällen, mit denen sich das oft etwas aufwendige partielle Ableiten umgehen lässt (vgl. Anhang).

Ergebnisdarstellung

Das Ziel unserer Anstrengungen besteht darin, für das Ergebnis **E** (das ist eine Zahl mit Maßeinheit, z.B. die Dichte von Stahl, welche im Experiment zu $\rho = 7.81\ \mathrm{g/cm^3}$ bestimmt wurde) eine Größe **ΔE** zu finden (z.B. $\Delta\rho = \pm\ 0.12\ \mathrm{g/cm^3}$), mit der sich die Genauigkeit der Messung charakterisieren lässt.

> Für die Angabe des Ergebnisses hat das folgende praktische Konsequenz: Der Taschenrechner ermittelt das (scheinbar) exakte Resultat 7.81 (wobei auf der Anzeige noch wesentlich mehr Ziffern erscheinen, z.B.: 7.81209772). Dass die zur Berechnung herangezogenen Ausgangsgrößen eine Messunsicherheit besitzen, kann er nicht wissen. Die Größe $\Delta\rho = \pm\ 0.12$ bedeutet nun, dass als Ergebnis alle Werte zwischen (minimal) 7.81 – 0.12 = 7.69 und (maximal) 7.81 + 0.12 = 7.93 in Frage kommen. Genauer kann man es nicht sagen.

Unser Ergebnis ist also nicht der angezeigte Zahlenwert sondern das Intervall „Zahlenwert ± Fehler“. Je kleiner dieses Intervall ist, desto genauer ist die Messung und desto sicherer sind die daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen und umgekehrt.

Die Ergebnisdarstellung erfolgt üblicherweise in der Form:

$$\mathbf{E \pm \Delta E} \qquad \text{hier:} \quad \rho = (\ 7.81 \pm 0.12\ )\ \mathrm{g/cm^3}$$

ΔE nennt man die „absoluten Messunsicherheit“ von E. Sie besitzt dieselbe Maßeinheit und sollte maximal mit 2 geltenden Ziffern angegeben werden (**Runden!**). In unserem Fall sind das die erste und die zweite Nachkommastelle. Damit muß auch das Ergebnis nur bis zur 2. Nachkommastelle angegeben werden. Alle weiteren Ziffern sind überflüssig (außer der dritten, diese wird zum Runden gebraucht).
Die Messgenauigkeit kann statt in absoluten Zahlen auch als „relative Messunsicherheit“ (in Prozent) angegeben werden. Das ist genau dasselbe, nur anders aufgeschrieben und in manchen Fällen anschaulicher. Im Beispiel sind das

$$\frac{0.12\ \mathrm{g/cm^3}}{7.81\ \mathrm{g/cm^3}} \approx 0.015 \qquad (\ 1.5\ \%\ )$$

Ist ein **Vergleichswert** vorhanden (hier: Tabellenwert $7.85\ \mathrm{g/cm^3}$), so ist zu prüfen, ob dieser im Fehlerintervall $E - \Delta E\ .....\ E + \Delta E$ (7.69 ..... 7.93 liegt. Wenn ja (das ist hier der Fall), so kann von einer Übereinstimmung im Rahmen der erreichbaren Messgenauigkeit gesprochen werden (Versuch gelungen!). Wenn nicht, dann liegt eine

Abweichung des Ergebnisses vom Erwartungswert vor, nach deren Ursachen geforscht werden muss. Denkbar sind *grobe* Fehler bei Versuchsdurchführung oder Auswertung, aber auch die Existenz unbekannter *systematischer* Fehler ist möglich.

Umgang mit systematischen Messabweichungen

Systematische Messabweichungen sind während der Messung i.a. **nicht** feststellbar. Meistens erkennt man sie erst nach Auswertung des Experiments durch Vergleich mit einem Tabellenwert. Ist ein systematischer Fehler **vorher bekannt** (z.B. aufgrund von Hinweisen in der Versuchsanleitung), so sind die Messwerte entsprechend zu **korrigieren** (sofort oder im Rahmen der Auswertung).
Werden nach Vergleich der Ergebnisse mit Tabellenwerten systematische Fehler vermutet, nachdem vorher grobe Fehler ausgeschlossen werden konnten, so muss danach gesucht werden (**Diskussion der Ergebnisse**). In manchen Fällen ist die Wiederholung eines Versuchsteils angebracht. Auch eine nachträgliche Korrektur von Messwerten ist denkbar, wenn man die Größe der systematischen Messabweichung auf irgendeine Weise bestimmen kann.
Existieren keine Vergleichswerte, so bleiben systematische Messabweichungen möglicherweise unentdeckt (was durchaus passiert, nicht nur im Praktikum!).

Statistische Messreihen

Statistische Messreihen ergeben sich:

a) aus der wiederholten Messung einer messabweichungsbehafteten Größe sowie
b) bei Messgrößen, die von Natur aus statistisch verteilt sind (z.B. Zählraten beim radioaktiven Zerfall).

Man erhält eine von der Art der Messgröße abhängige Häufigkeitsverteilung.
Für die Auswertung gibt es spezielle mathematische Methoden, wobei im Praktikum meist der *Mittelwert plus/minus Vertrauensbereich* als Ergebnis interessant ist:

$$\overline{x} \pm t \cdot \Delta\overline{x} \quad \text{mit} \quad \Delta\overline{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

s ist die empirische Standardabweichung, n die Anzahl der Messwerte und t ein Parameter für die statistische Sicherheit (z.B. $t \approx 2$ für statistische Sicherheit 95 % bei mindestens 10 Messwerten).
Weitere Einzelheiten sind der reichlich vorhandenen Literatur zu entnehmen (Anleitung zum Versuch 303, Praktikumshomepage, Praktikumsbücher, Spezialliteratur zur Statistik).
Wichtig ist in jedem Fall, dass die Güte statistischer Methoden immer von der möglichst **großen Zahl** der Messwerte abhängt (d.h. Ergebnisse, die der Computer statistisch aus drei Messwerten berechnet, sehen vielleicht gut aus, sind aber praktisch wertlos).

Grafische Darstellung, Lineare Regression

Wird im Experiment die Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x ermittelt, so ist es oft sinnvoll, deren Zusammenhang grafisch darzustellen (x-y-Diagramm; auf geeigneten Maßstab und richtige Achsenbeschriftung achten!). Die Genauigkeit der Messgrößen kann in ein solches Diagramm in Form von Fehlerbalken eingetragen werden. Sinnvoll ist diese Maßnahme vor allem dann, wenn

a) der funktionale Zusammenhang zwischen x und y von vornherein noch nicht bekannt ist und es mehrere Möglichkeiten gibt, eine Kurve durch die Messpunkte zu legen (in Frage kommen dann nur solche Kurven, die durch alle Fehlerbalken verlaufen).
b) Kenngrößen der Kurve (Anstieg, Schnittpunkte mit den Achsen, Lage von Maxima und Minima) in die weiteren Berechnungen mit einfließen und damit das Endergebnis (und dessen Genauigkeit) beeinflussen.

Im Praktikum ist der zu erwartende Zusammenhang zwischen den Messgrößen im allgemeinen vorher bekannt; in den meisten Fällen ist er linear (bzw. kann er linearisiert werden, vgl. Beispiel im Anhang). Die Messkurve ist eine Gerade der Form $y = a + b\,x$. Es bleibt die Frage nach der optimalen Lage der Geraden, da die Messpunkte aufgrund der Messabweichungen eine gewisse Streuung aufweisen. Diese so genannte *„Ausgleichsgerade“* kann per Hand nach Augenmaß gelegt werden. Besser ist jedoch die Geradenberechnung mittels der „Linearer Regression“ (nähere Erläuterungen vgl. Literatur, z.B. /1/). Diese Methode liefert sowohl den Anstieg b der Ausgleichsgeraden als auch deren Schnittpunkt a mit der y-Achse. Bei guten Programmen werden auch die zugehörigen Standardabweichungen s_b und s_a mit ausgegeben, woraus sich durch Multiplikation mit dem t-Parameter die Messunsicherheiten Δb und Δa ergeben (t kann Tabellen entnommen werden. Als Richtwerte gilt: $t \approx 2$ für ≥ 10 Messpunkte, $t \approx 3$ für 5 Messpunkte).

Anhang

A) Spezialfälle bei der Fehlerfortpflanzung

1) Wenn die Gleichung $E = E(x, y, z, ...)$ nur aus Produkten und Quotienten besteht (kein +, -, Winkelfunktion o.ä.), dann vereinfacht sich die Formel der partiellen Ableitungen zu einem Ausdruck, in dem nur die relativen Fehler addiert werden (Exponenten werden dabei zu Vorfaktoren!).

   Beispiel : $$E = \frac{x \cdot y^2}{z} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

2) In einzelnen Fällen ist es möglich, zu einem vereinfachten Ausdruck zu gelangen, indem Summen bzw. Differenzen geschickt zusammengefaßt oder einzelne Größen (mit kleinen Fehlergrenzen) vernachlässigt werden. Hier ist der bereits oben erwähnte gesunde Menschenverstand (ggf. nach Rücksprache mit dem Assistenten) zu benutzen.

3) Gleiches gilt für eine gelegentlich zu verwendende „Einsetzmethode“:

Beispiel: $E = \frac{u - v}{x - y} \rightarrow E_{max} = \frac{u_{max} - v_{min}}{x_{min} - y_{max}}$ und $\Delta E = E_{max} - E$

4) Bei statistisch gewonnenen Messwerten, die unabhängig voneinander sind, kann eine quadratische Fehleraddition erfolgen.

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2 + \ldots}$$

B) Beispiel für eine Linearisierung (Versuch 204, Messung der Dampfdruckkurve)

Zwischen Druck und Temperatur besteht folgender Zusammenhang:

$$p = p_0 \cdot \exp\left(- Q_v / RT\right)$$

Durch Logarithmieren dieser Gleichung erhält man

$$\ln\left(p\right) = \ln\left(p_0\right) - \frac{Q_v}{R} \cdot \frac{1}{T}$$

was einer linearen Funktion der Form $y = a + b \cdot x$ entspricht.

Dabei sind: $y = \ln(p)$ $x = 1 / T$ $a = \ln(p_0)$ und $b = -Q_V / R$.

Wenn man nun $\ln(p)$ über $1/T$ grafisch aufträgt, so ergibt sich eine Gerade mit dem Anstieg $-Q_V / R$ und dem Achsenschnittpunkt $\ln(p_0)$.