Die Bahnform visueller Doppelsterne - dargestellt mit Geogebra[1]

Visuelle Doppelsterne

Visuelle Doppelsterne sind Sterne in einem gravitativ gebundenen System. Dabei sind beide Komponenten sichtbar und getrennt voneinander beobachtbar. Die hellere Komponente (S_1) bezeichnen wir hier als Hauptstern und die dunklere Komponente als Begleiter (S_2). Beide Sterne umkreisen ihren gemeinsamen Massenschwerpunkt (S_p) auf Kepler-Ellipsen (vgl. Abb. 1). Der Drehsinn und die Umlaufperiode sind dabei für beide Sterne gleich.

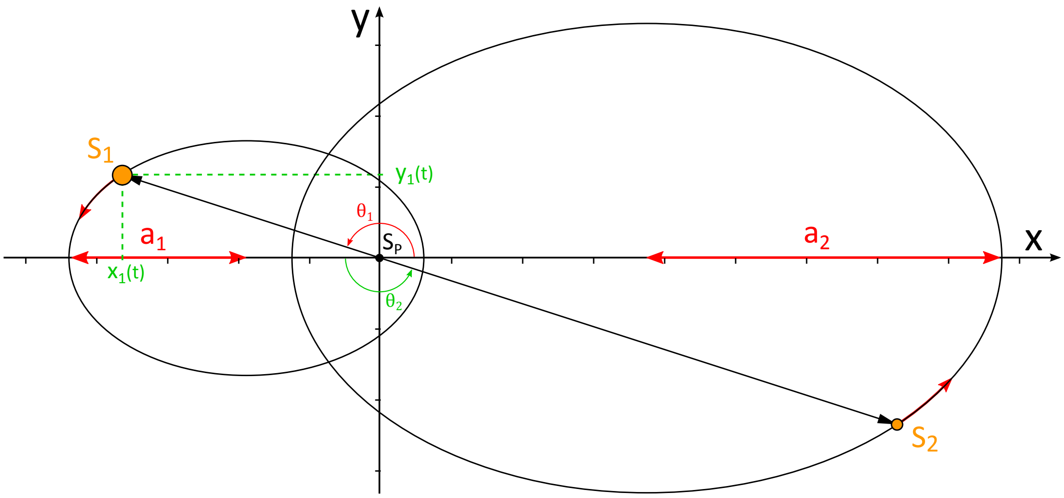

Abbildung 1: Bahnform visueller Doppelsterne

Während die Exzentrizitäten beider Bahnen ebenfalls gleich sind (in Abb. 1 ist $e = 0,75$) unterscheiden sich die großen Halbachsen in der Regel. Denn damit der Schwerpunkt des Systems erhalten bleibt, genügen die Sterne dem Schwerpunktsatz

$$m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2\,. \tag{1}$$

Anders ausgedrückt verhält sich das Verhältnis der Sternmassen umgekehrt wie das Verhältnis der großen Halbachsen

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_2}\,. \tag{2}$$

Unterschiedlich bzw. entgegengesetzt ist auch die Lage der Bahnen im Raum. Die Länge des Periastrons ω der beiden Sterne unterscheidet sich um 180°

$$\omega_1 = 180^\circ + \omega_2\,. \tag{3}$$

Beschreibung der Ellipsen

Der Abstand des Hauptsterns vom Brennpunkt der Kepler-Ellipse, dem Schwerpunkt lässt sich durch

$$r_1(t) = \frac{(1-e^2)\cdot a_1}{1 + e\cdot\cos\theta_1(t)} \tag{4}$$

[1]GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone - http://www.geogebra.org/

schreiben. Hierin ist $\theta(t)$ die zeitabhängige, wahre Anomalie des Sterns. Für den Begleiter gilt in analoger weise

$$r_2(t) = \frac{(1-e^2)\cdot a_2}{1-e\cdot\cos\theta_2(t)}\,. \tag{5}$$

Das Minus-Zeichen im Nenner von (5) berücksichtigt die entgegengesetzte Lage im Raum bzw. das der Schwerpunkt im linken Brennpunkt der Ellipse sitzt. Aus Abbildung 1 entnehmen wir weiterhin die Beziehung

$$\theta_2 = \theta_1 + 180° \tag{6}$$

Um die zeitabhängige Position beider Sterne auf ihrer Bahn beschreiben zu können muss jetzt noch die Kepler-Gleichung

$$M = E - e\cdot\sin E \tag{7}$$

gelöst werden (M: mittlere Anomalie, E: exzentrische Anomalie; näheres zu diesen Größen findet man z.B. in [2]). Daraus erhält man den Zusammenhang $\theta_1(t)$. Dies kann u.a. durch folgendes Iterationsverfahren geschehen:

$$E_0 = M \tag{8}$$

$$E_{i+1} = M + e\cdot\sin E_i \tag{9}$$

Zwischen exzentrischer und wahrer Anomalie besteht dann der Zusammenhang

$$\cos\theta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cdot\cos E}\,. \tag{10}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4), (5), (6) und (10) lassen sich nun die Positionen beider Planeten auf ihren Kepler-Ellipsen im Schwerpunktsystem beschreiben.

Relative Bahn des Begleiters

In der Praxis werden Doppelsternbahnen häufig nicht in einem absoluten Koordinatensystem beobachtet, sondern nur ihre Relativbewegung. Dies ist vor allem bei Beobachtungen mit bloßem Auge einfacher. Man nimmt hierfür an, dass die heller Komponente stationär ist und von der dunkleren Komponente umrundet wird. Auf diese Weise wurde z.B. auch die erste jemals vermessene Doppelsternbahn, jene des Sterns ξ Ursae Majoris im Jahre 1830 aufgezeichnet [1]. Es mag einen zunächst verwundern, dass die relative Bahn zweier sich auf Kepler-Ellipsen bewegenden Doppelsterne wieder eine Ellipse ist und sogar die gleiche Exzentrizität wie die beiden einzelnen Ellipsen aufweist. Die große Halbachse der relativen Ellipse entspricht dabei der Summe der großen Halbachsen der einzelnen Ellipsen ($a_{rel} = a_1 + a_2$). Mathematisch zeigen wir dies durch eine Koordinatentransformation. Wir verschieben hierfür die hellere Komponente in den Koordinatenursprung. Zunächst zerlegen wir die Position der beiden Sterne in kartesische Koordinaten:

$$x_1 = r_1\cdot\cos\theta_1 \tag{11}$$

$$y_1 = r_1\cdot\sin\theta_1 \tag{12}$$

und

$$x_2 = r_2\cdot\cos(\theta_1+180°) = -r_2\cdot\cos\theta_1 \tag{13}$$

$$y_2 = r_2\cdot\sin(\theta_1+180°) = -r_2\cdot\sin\theta_1\,. \tag{14}$$

Nun führen wir die Koordinatentransformation aus, in dem wir die Terme $x_{rel} = x_2 - x_1$ und $y_{rel} = y_2 - y_1$ bilden.

$$x_{rel} = (r_1 + r_2) \cdot \cos(\theta_1 + 180°) \tag{15}$$
$$y_{rel} = (r_1 + r_2) \cdot \sin(\theta_1 + 180°) \tag{16}$$

Berechnen wir nun die Summe $r_{rel} = r_1 + r_2$:

$$r_{rel} = \frac{(1-e^2) \cdot a_1}{1 + e \cdot \cos\theta_1} + \frac{(1-e^2) \cdot a_2}{1 - e \cdot \cos(\theta_1 + 180°)} \,. \tag{17}$$

Ersetzen wir im ersten Summanden $\cos(\theta_1 + 180°)$ durch $-\cos\theta_1$, so können wir die Brüche addieren und erhalten

$$r_{rel} = \frac{(1-e^2) \cdot a_{rel}}{1 - e \cdot \cos(\theta_1 + 180°)} \tag{18}$$

mit $a_{rel} = a_1 + a_2$. Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen (vgl. Abb. 2):

- die relative Bahn ist wieder eine Kepler-Ellipse
- die relative Ellipse besitzt die gleiche Exzentrizität e wie die beiden ursprünglichen Ellipsen
- die große Halbachse der relativen Ellipse ist die Summe der ursprünglichen Halbachsen $a_{rel} = a_1 + a_2$
- der Hauptstern sitzt im selben Brennpunkt der relativen Ellipse, wie der Schwerpunkt im Orbit des Begleiters
- die wahre Anomalie des Begleiters ist im Schwerpunktsystem und im relativen System identisch

An dieser Stelle ist für den erfahren Mathematiker sicherlich alles gezeigt, nicht aber für den Schülern. Aus diesem Grund sollen die Ergebnisse mit GeoGebra visualisiert werden.

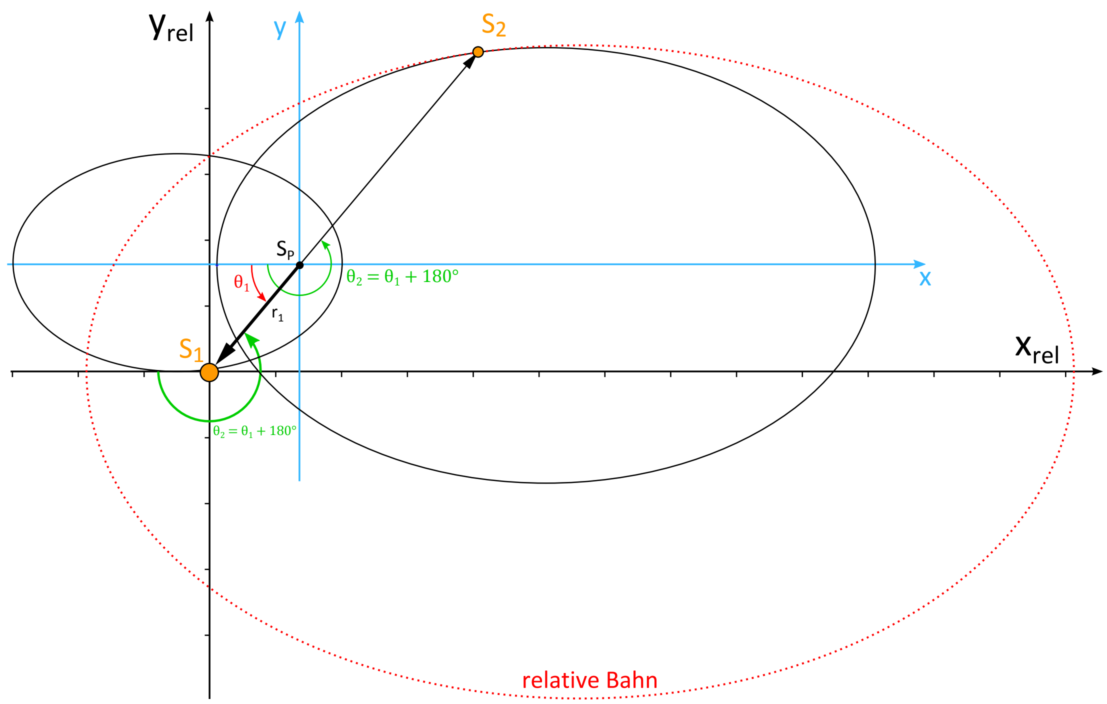

Abbildung 2: Relative Bahn des Begleiters

Umsetzung in GeoGebra

Ellipsen im Schwerpunktsystem

In GeoGebra wird eine Ellipse eindeutig durch drei Punkte definiert. Den beiden Brennpunkten und einem Punkt auf der Ellipse (vgl. Abb. 3). Für die Doppelsternbahnen setzten wir den Schwerpunkt in den rechten Brennpunkt an den Punkt (0, 0) der x-y-Ebene. Der zweite Brennpunkt hat dann die Koordinaten $(-2 \cdot a \cdot e, 0)$. Als dritten Punkt wählt man das Apastron mit den Koordinaten $(-a \cdot (1+e), 0)$. Das Periastron besitzt die Koordinaten $(a \cdot (1-e), 0)$. Um die Exzentrizität der Ellipse variieren zu können wird ein Schieberegler $0 \leq e \leq 1$ hinzugefügt. Die Länge der großen Halbachse wird ebenfalls durch einen Schieberegler $0 \leq a \leq 5$ variabel gestaltet.

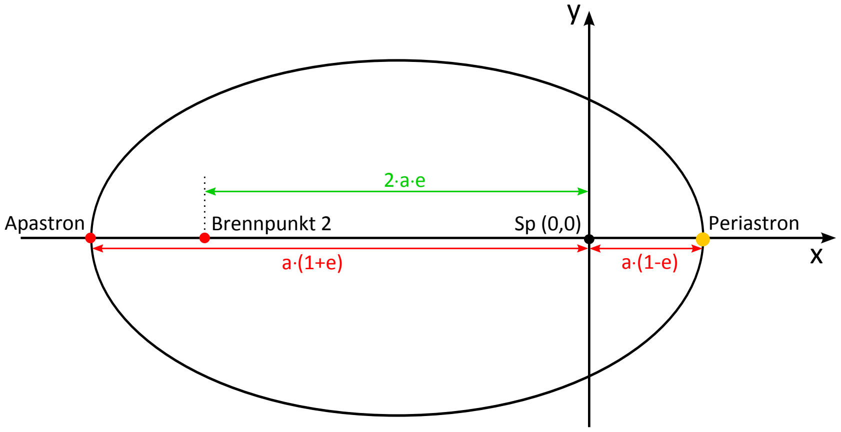

Abbildung 3: Ellipse

Analog verfährt man mit der zweiten Ellipse, wobei auf die entgegengesetzte Ausrichtung geachtet werden muss.

Umlauf auf der Keplerbahn

Der Hauptstern auf seiner Ellipsenbahn wird durch einen Punkt mit den Koordinaten (x_1, y_1) bzw. den Ortsvektor $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ repräsentiert. Dabei gilt:

$$x_1(\theta_1) = r_1(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \tag{19}$$
$$y_1(\theta_1) = r_1(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1) \tag{20}$$

Für $r_1(\theta)$ setzt man Gleichung 4 ein. Um nun die Bewegung des Sterns zeitlich darstellen zu können wird die Kepler-Gleichung (7) durch das Iterationsverfahren (9) gelöst. In der vorliegenden GeoGebra-Simulation wird die Iteration bis E_{20} berechnet. Dies liefert einen Zusammenhang zwischen mittlerer und exzentrischer Anomalie. Die mittlere Anomalie kann mit Hilfe eines Schiebereglers im Bereich zwischen $0 \leq M \leq 2 \cdot \pi$ variiert werden. Das dafür jeweilig berechnete E_{20} wird anschließend in (10) eingesetzt. Auf diese Weise ist der Zusammenhang zwischen dem linearen Zeitmaß M und der Position des Sterns auf der Ellipse, beschrieben durch die wahre Anomalie θ_1, hergestellt. Startet man mit Rechtsklick auf den Schieberegler M und klicken von „Animation ein“ die Animation, so wird M variiert und der Stern umkreist den Schwerpunkt auf der Ellipse.
Für den Begleiter verfährt man analog. Man füge eine Punkt mit den Koordinaten (x_2, y_2) ein und beschreibe die Position des Sterns durch die anfangs hergeleiteten Beziehungen (5) und (6).

Relative Bahn

Die Bewegung des Begleiters auf der relativen Ellipse ist schnell dargestellt. Man füge nur wieder einen Punkt mit den Koordinaten (x_{rel}, y_{rel}) hinzu und drücke die Koordinaten mit Hilfe der Gleichung (18) und dem bekannten, schon berechneten θ_1 aus.
Nun sollen aber auch der Schwerpunkt und die ursprünglichen Ellipsen mit dargestellt werden. Auch diese bewegen sich nach der Transformation um den Hauptstern. Um dies in die Simulation zu integrieren, müssen alle Punkte (Schwerpunkt und die jeweils drei Definitionspunkte der Ellipsen) transformiert werden, d.h. von ihren x- bzw. y-Koordinaten werden die Koordinaten des Hauptsterns ($x_1 = r_1 \cdot \cos\theta_1$ und $y_1 = r_1 \cdot \sin\theta_1$) subtrahiert.

Abschließend werden zwei Kontrollkästchen eingefügt, mit deren Hilfe ausgewählt werden kann, welche der beiden Darstellungsweisen (Schwerpunktsystem oder relative Bahn) gerade angezeigt werden soll.

Literatur

[1] H. Karttunen: ASTRONOMIE - *Eine Einführung*; Springer-Verlag; 1987

[2] W. Kuhn (Hrsg.); Handbuch der experimentellen Physik, Sekundarbereich II, Band 11: ASTRONOMIE - ASTROPHYSIK KOSMOLOGIE; AULIS VERLAG; 2011